数理解析研究所講究録
998巻 1997年 20-33

非可換環のHasse zeta関数

東京工業大学　理学部　修士課程
深谷　太香子 (Takako Fukaya)

整数環上有限生成な、可換とは限らない環のHasse zeta関数を、可換環の場合の一般化として定義する事ができた。そのゼータ関数の性質、ゼータ関数の収束性と環のGelfand-Kirillov次元との関係について、わかった事や予想、などをここに書かせて頂く。

いろいろな点で、加藤和也先生の御指導をいただいた。また、「非可換環のゼータ関数を考えてみたら」とおすすめ下さったのは黒川信重先生である。先生方に感謝を申し上げたい。

§1. ゼータ関数の定義

可換環の場合は、

Aが$\mathbb{Z}$上有限生成な可換環

である時、Aの Hasse zeta 関数 $\zeta_A(s)$ は次の様に定義された。

$$\zeta_A(s) = \prod_{m:A\text{の極大イデアル}} (1-N(m)^{-s})^{-1}$$

ここで、$N(m) = \#(A/m)$ (A/mの位数) である。

ここには次の1対1対応があった。

$$\{A\text{の極大イデアル}\} \overset{1\text{対}1}{\longleftrightarrow} \{A\text{の単純加群の同型類}\}$$

$$m \longleftrightarrow A/m\text{の類}$$

そこで

Aを$\mathbb{Z}$上有限生成な可換とは限らない環

とする時、Aの Hasse zeta 関数 $\zeta_A(s)$ を次の様に定義する。

$$\zeta_A(s) = \prod_{M} (1-N(M)^{-s})^{-1},$$

ここで、MはAの有限な単純加群の同型類全体を走り、

$N(M) = \#\mathrm{End}_A(M)$ (MのA加群としての自己準同型全体のなす環、実は有限体、の位数) である。

定義の形より、$\zeta_A(s)$の収束の問題が気に掛かるが、$\zeta_A(s)$の収束を次の様に定義する。

$\zeta_A(s)$が収束 $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\zeta_A(s)$が$\mathrm{Re}(s)$が十分大で絶対収束

$\zeta_A(s)$が発散 $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ それ以外

§2. ゼータ関数の収束性と環のGelfand-Kirillov次元

先の定義に於いて$\zeta_A(s)$は多くのよく知られた環Aに対し収束するが発散する事もある。どの様な環Aについて$\zeta_A(s)$が収束するか、は難しい問題である。これについて考える。

1° 可換の場合

Aが可換である時、$\zeta_A(s)$の絶対収束域は

$$\underset{\text{(Krull 次元)}}{Re(s) > \dim(A)} = \max\left\{ n \,;\, \begin{array}{l} \mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_n \\ \mathfrak{p}_i : \text{Aの素イデアル} \quad (1 \leq i \leq n) \end{array} \right\}$$

とAのKrull次元と関っていた。

一般にAが可換とは限らない場合にもこの様な環の次元が存在するかと考えてみたくなるが、$\zeta_A(s)$の収束性とAのGelfand-Kirillov次元との間に、ある関係が予想される。

2° Gelfand-Kirillov次元の定義

Gelfand-Kirillov次元は通常体上のalgebraに対し定義される。

kを体，　Aをk上有限生成なalgebra

SをAのk上の生成元からなる有限集合(1つ固定)

とする時、AのGelfand-Kirillov次元$GKdim(A) \in \{t \in \mathbb{R} \,;\, t \geq 0\} \cup \{\pm\infty\}$が次の様に定義される。

$$\mathrm{GKdim}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \dim_k(V_n(S))}{\log n}$$ (これは生成系 S の取り方に依らない。)

ここに $V_n(S) = \sum_{j=0}^{n} k S^j$, $S^j = \{x_1 \cdots x_j \,;\, x_1, \cdots, x_j \in S\}$ である。

更に、A が可換である時

$$\mathrm{GKdim}(A) = \dim(A)$$

がいえる。この定義を環上の algebra に拡張する。本稿では

R は $\mathbb{Z}$ 上有限生成可換環、とさせて頂く。

A が有限生成 R − algebra

である時

$$\mathrm{GKdim}(A\,;R) = \sup\{\mathrm{GKdim}(A \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})) + \dim(R/\mathfrak{p}) \,;\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}$$

と定義する。ここに $\kappa(\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{p}$ の剰余体である。この上で

A が $\mathbb{Z}$ 上有限生成環

である時、A の Gelfand-Kirillov 次元 $\mathrm{GKdim}(A) \in \{t \in \mathbb{R}\,; t \geq 0\} \cup \{\pm\infty\}$ を

$$\mathrm{GKdim}(A) = \mathrm{GKdim}(A\,;\mathbb{Z})$$

と定義する。A が可換である時再び

$$\mathrm{GKdim}(A) = \dim(A)$$

が成立する。

3° Gromov の結果とそこから導かれる事

Gelfand-Kirillov 次元について Gromov が次の事を得ている。
([Gr])

<u>定理</u>(Gromov) Gを有限生成群, kを体とする時次が成立する。

$\mathrm{GKdim}(k[G])<\infty \iff G$: almost nilpotent □

(G : almost nilpotent $\overset{def}{\iff}$ Gが指数有限巾零部分群をもつ.)

これより、$R\neq 0$ならば次の事も成り立つ。

$$\mathrm{GKdim}(R[G])<\infty \iff G : \text{almost nilpotent}.$$

これはGelfand-Kirillov次元の計算法について行われている様々な研究により得られる。

<u>定理1</u> Hを有限rank nの自由アーベル群、Gを次の完全系列をもつ群とする。

$$1\to H\to G\to \mathbb{Z}\to 1,$$

$R\neq 0$, $A=R[G]$とする時次が成立する。

$\zeta_A(s)$が収束 $\iff$ G : almost nilpotent. □

定理1のAについてGがalmost nilpotentでない時の様に、$\zeta_A(s)$が発散する環が実際に存在する。またGromovの結果と定理1より

<u>系</u> Aを定理1の通りとする。この時次が成立する。

$\zeta_A(s)$が収束 $\iff$ $\mathrm{GKdim}(A)<\infty$. □

が得られる。

<u>注</u> $\zeta_A(s)$の収束性との関係では“Krull次元”はうまくはたらかない。(ここでいう“Krull次元”は非可換環の“素イデアル”を用いて定義される非可換環のKrull次元である。)

例えばAを定理1の通りとすると、常に

$$\mathrm{Krull\,dim}(A) = \dim(R) + n + 1$$

が成立し、その値は$\zeta_A(s)$の収束，発散に依らない。

4° modified zeta 関数

これまでみてきた様に$\zeta_A(s)$の収束性と$\mathrm{GKdim}(A)$の有限性（$-\infty$も含む）の間には強い関りが予想されるが、加藤先生が次の例をお教え下さった。

<u>例</u>（加藤先生）　kを有限体.

$A = k\{X, Y, U, V\} / \langle XY-1, UV-1, YX+VU-1 \rangle$ とする。

ここで$k\{\quad\}$は非可換多項式環、$\langle\quad\rangle$はその中の元の生成する両側イデアルをあらわす。この時次が成り立つ。

(1) $\zeta_A(s) = 1$　（$\zeta_A(s)$は収束する）.

(2) $\mathrm{GKdim}(A) = +\infty$.

そこで次の modified zeta 関数$\zeta_A^*(s)$を定義し、考察する。

<u>定義</u>　$\zeta_A^*(s) = \prod_M (1 - N(M)^{-s})^{-1}$.

ここで、MはAの$^\#\mathrm{End}_A(M) < \infty$なる単純加群の同型類全体を走り、$N(M) = {}^\#\mathrm{End}_A(M)$である。

注　M自身は有限とは限らない。

よく知られた環の中に $\zeta_A(s) = \zeta_A^*(s)$ が成立するものも多くある。

加藤先生の例の環Aに対しては.

(3) $\zeta_A^*(s)$ は発散する.

これより収束性とGelfand-Kirillov次元との関係については、

modified zeta関数の方を考察する。改めて、次の事が予想される。

予想　$\zeta_A^*(s)$ が収束　$\Longleftrightarrow$　$\mathrm{GKdim}(A) < \infty$.

注　定理1のAに対し

$$\zeta_A(s) = \zeta_A^*(s)$$

が成立する。これはRosenbladeの次の定理による。([Ro])

定理 (Rosenblade)　Gを有限生成群で指数有限可解部分群をもつものとし、$A=R[G]$とする。この時、Aの単純加群はすべて有限である。 □

この事から定理1の環Aについても予想が正しい事がわかる。

5° 結果

定理2　Gを有限生成almost nilpotent群、$A=R[G]$とする。

この時

$\zeta_A^*(s)$ $(= \zeta_A(s))$ は収束する. □

定理3　Gを有限生成巾零群で次の中心列をもつものとする。

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r = \{1\},\quad G_i/G_{i+1} \simeq \mathbb{Z} \ (0 \le i \le r-1).$$

更に$A = R[G]$とする。この時次が成立する。

$$\zeta_A^*(s) \ \left(= \zeta_A(s)\right) = \zeta_{R'}(s).$$

ここに $R' = R[x_1, x_1^{-1}, \cdots, x_r, x_r^{-1}]$（通常の可換なLaurent多項式環）である。 □

注　定理2, 3の$\zeta_A^*(s) = \zeta_A(s)$は前述のRosenbladeの定理により同様に導かれる。

注　定理2は定理3と次の命題より得られる。

命題　Gを定理2の通りとすると、Gは指数有限正規部分群Hで定理3の群Gの条件を満たすものをもつ。 □

命題　Gを有限生成群、HをGの指数有限正規部分群とする時、次が成立する。

$$\zeta_{R[H]}(s)\text{が収束} \Rightarrow \zeta_{R[G]}(s)\text{が収束}.$$ □

定理2とGromovの結果より次が得られる。

系　Gを有限生成群，$A = R[G]$とする。この時次が成立する。

$$\mathrm{GKdim}(A) < \infty \Rightarrow \zeta_A^*(s)\text{が収束}.$$ □

6°　ζ次元

定義　Aを$\mathbb{Z}$上有限生成環とする時、Aのζ次元、

$\zeta\dim(A) \in \{t \in \mathbb{R} ; t \geq 0\} \cup \{\pm\infty\}$ を次の様に定義する。

$$\zeta\dim(A) = \inf\{d \in \mathbb{R} ; \zeta_A^*(s) \text{ は } \mathrm{Re}(s) > d \text{ で収束}\}.$$

Aが可換である時、

$$\zeta\dim(A) = \dim(A)$$

であった。Aが可換とは限らない時には $\zeta\dim(A)$ はどう表されるのであろうか。これまで考察してきた $GK\dim(A)$ については実は $\zeta\dim(A) = GK\dim(A)$ は必ずしも成立しないのである。

<u>例</u> Gを有限生成巾零群とし、$G^{(0)} = G$, $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G]$ $(i \geq 0)$ とする時、Bass([Ba])の定理により次が成立する。

$$GK\dim(R[G]) = \dim(R) + \sum_{i \geq 0} (i+1)\,\mathrm{rank}\left(G^{(i)}/G^{(i+1)}\right).$$

ここでGとして定理3のGをとると定理3より

$$\zeta\dim(R[G]) = \dim(R) + \sum_{i \geq 0} \mathrm{rank}\left(G^{(i)}/G^{(i+1)}\right)$$

である。よって $GK\dim(R[G]) \geq \zeta\dim(R[G])$ であり、等号がGによっては成立しない事がある。

特にこれまでの例より次が予想される。

<u>予想</u> Aを有限生成R-algebraとする時

$$\zeta\dim(A) \leq GK\dim(A ; R).$$

§3 リー環の包絡環のゼータ関数.

リー環の包絡環のゼータ関数について次の事を得た。

<u>定理4</u> $\mathfrak{g}$ を R 上の可解リー環で R-加群として自由で有限 rank n をもつものとし、A を $\mathfrak{g}$ の包絡環とする。この時

$$\zeta_A(s) = \zeta_R(s-n). \qquad \square$$

$\mathfrak{g}$ が可解ではない時、$\mathfrak{g}$ の包絡環 $U(\mathfrak{g})$ のゼータ関数は必ずしも定理4の様な簡明な形には表されない。

<u>例</u> $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$, $A = U(\mathfrak{g})$ とする時.

$$\zeta_A(s) = \zeta(s-3) \prod_{p:\text{奇素数}} \left((1-p^{-(s-1)})^{\frac{p-1}{2}} \cdot (1-p^{-s})^{-\frac{p-1}{2}} \right).$$

ゼータ関数の計算は、後でもう少し詳しく述べるが、それぞれの素数 p に対し標数 p の閉体上の環の既約表現の分類により行う。$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ については、1967年の Rudakov-Shafarevich の結果を用い求めた。([R-S])

<u>注</u> 例の $\zeta_A(s)$ は $\mathrm{Re}(s)=2$ に自然境界をもち、全複素平面に解析接続しない事を黒川先生が示して下さった。この例がこれまでに計算をした中では唯一の、可換環のゼータ関数とは全く別の姿をしたゼータ関数である。

§4. 定理3の証明の方針

①ゼータ関数についての一般論として次が成立する。

$$\zeta_A(s)=\prod_{r\geq 1}\zeta_{A,r}(s)$$

$$\zeta_{A,r}(s)=\prod_{p:\text{素数}}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\#\mathfrak{S}_{A,r}(\mathbb{F}_{p^n})}{n}(p^{-s})^n\right)$$

：スキーム $\mathfrak{S}_{A,r}$ の Hasse-Weil zeta 関数.

ここに、$\mathfrak{S}_{A,r}$ は"Aのr次元既約表現の空間"と呼ばれる$\mathbb{Z}$上有限型スキームであり、定義は省略するが、$K=\overline{\mathbb{F}_p}$（代数閉包）に対し

$\mathfrak{S}_{A,r}(K)$：AのK上のr次元既約表現の同型類全体の集合、

$\mathfrak{S}_{A,r}(\mathbb{F}_{p^n})$：$\mathfrak{S}_{A,r}(K)$の$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{F}_{p^n})$固定点

となる。

注 先の収束性についての問題についてであるが、各$\zeta_{A,r}(s)$は、$\mathbb{Z}$上有限型のスキームのHasse-Weil zeta関数なので$\mathrm{Re}(s)$が十分大で絶対収束する。すべてかけ合わせた$\zeta_A(s)$について収束性が不明という事をいっているのであった。

②Aを定理3の通りとする。この時次の式が成立する。

$$\zeta_A(s)=\prod_{\mathfrak{m}:R\text{の極大イデアル}}\zeta_{A/\mathfrak{m}A}(s).$$

従って$R=k$：有限体と仮定していい。$\mathfrak{S}_A=\coprod_{r\geq 1}\mathfrak{S}_{A,r}$とし、$k$の拡大体$k'$に対し$\mathfrak{S}_A^{k}(k')$を$\mathfrak{S}_A$の$k$-スキームとしての$k'$-有理点とする。

Kをkの代数閉体とし、$k\subset\mathbb{F}_q\subset K$に対し、

$$\#\mathfrak{S}_A^{k}(\mathbb{F}_q)=\#\{x\in\mathfrak{S}_A^{k}(K);\ \mathrm{Fr}_q(x)=x\}=(q-1)^r \quad (\mathrm{Fr}_q\text{はFrobenius})$$

を示せば十分。

③命題　Gを定理3の通りとし、$\theta : G \to G$を次の条件(i)(ii)を満たすGの自己同型とする。

(i) $\theta(G_i) = G_i \quad (0 \leq i \leq r)$

(ii) $\theta : G_i/G_{i+1} \longrightarrow G_i/G_{i+1}$ と induce されるものは恒等射 $(0 \leq i \leq r-1)$

この時　$\#\{x \in \Gamma^{k}_{A}(K) ; Fr_q(x) = \theta(x)\} = (q-1)^r$.　($\theta$に依らない) □

恒等射は明らかに条件(i)(ii)を満たすので、命題より定理3は導かれる。よって命題をrについての帰納法で示す。

④ $B = k[G_1]$とする。$1 \to G_1 \to G \to \mathbb{Z} \to 1$ (完全) なるαを1つ固定し ($\alpha \mapsto 1$)、$f : B \to B$ 自己同型を、$f(b) = \alpha b \alpha^{-1}$ $(b \in B)$と定義する。

この時

$$\begin{tikzcd} \Gamma^{k}_{A}(K) \arrow[r, "\pi"] & f\backslash\Gamma^{k}_{B}(K) \\ & \Gamma^{k}_{B}(K) \arrow[u, "自然"'] \end{tikzcd}$$

という全射πが存在する。
($f\backslash\Gamma^{k}_{B}(K)$は$\Gamma^{k}_{B}(K)$を$f$の作用でわったもの。)

注　Aが可換である時、上の図式は$\Gamma^{k}_{A}(K) \xrightarrow{\pi} \Gamma^{k}_{B}(K)$になるが、非可換の場合は$f$の作用でわった所と関係する。

実は$\Gamma^{k}_{A}(K)$は$f\backslash\Gamma^{k}_{B}(K)$上の$K^\times$($=K-\{0\}$の乗法群)-主等質空間である。

つまり、・$K^\times$が$\Gamma^{k}_{A}(K)$に作用し、$\pi(ax) = a\pi(x)$　$(a \in K^\times, x \in \Gamma^{k}_{A}(K))$.

・$x, x' \in \Gamma^{k}_{A}(K)$, $\pi(x) = \pi(x')$に対し、$a \in K^\times$が一意に存在し $ax = x'$.

よって、$z \in f \setminus \Gamma_B^{\mathrm{reg}}(K)$，$Frq(z) = \theta(z)$ と、$x_0 \in \Gamma_A^{\mathrm{reg}}(K)$，$\pi(x_0) = z$ に対し

$$\#\{x \in \Gamma_A^{\mathrm{reg}}(K) ; Frq(x) = \theta(x), \pi(x) = z\} = \#\{a \in K^\times ; Frq(ax_0) = \theta(ax_0)\}$$

$$= \#\{a \in K^\times ; a^{q-1} Frq(x_0) = \theta(x_0)\} \underset{\uparrow}{=} \#\{a \in K^\times ; b = a^{q-1}\} = q-1 \quad \cdots (*)$$

$b\,Frq(x_0) = \theta(x_0)$ なる一意的な $b \in K^\times$ をとる。

r についての帰納法の仮定より、$\#\{y \in \Gamma_B^{\mathrm{reg}}(K) ; Frq(y) = \theta^i(y)\} = (q-1)^{r-1}$ $(i \in \mathbb{Z})$.

(f は命題の条件 (i)(ii) を満たす事より上式は従う。)

$\Rightarrow \#\{z \in f \setminus \Gamma_B^{\mathrm{reg}}(K) ; Frq(z) = \theta(z)\} = (q-1)^{r-1}$

$\underset{\uparrow}{\Rightarrow} \#\{x \in \Gamma_A^{\mathrm{reg}}(K) ; Frq(x) = \theta(x)\} = (q-1)^r$.

(*) により.

よって命題が示され、従って定理3が示された。

§5. 補足

非可換環の Hasse zeta 関数について、やはりわからない事がたくさんある。本稿で述べさせて頂いた事に関しては、例えば、ζ 次元は可換の場合と同様一般に整数値のみをとるのか(今までの計算例ではすべて整数値をとる)という事がある。因みに Gelfand-Kirillov 次元については2以上の任意の実数値を Gelfand-Kirillov 次元としてもつ環が存在する事が知られている。また ζ 次元の純代数的定義は何か、あるのかという事もある。

§4で述べた$\zeta_{A,r}(s)$はr毎に不規則に異り、また各rが非常に複雑な姿をしているにもかかわらず、全部乗じた$\zeta_A(s)$はとても簡明な形をしている環がある。この様にゼータ関数には、不思議な事、わからない事が多くある様である。

参考文献

[Ba] H. Bass, The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups, Proc. London Math. Soc. 25 (1972)

[Gr] M. Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps, Publ. IHES 53 (1993).

[Ro] J. E. Rosenblade, Group rings of polycyclic groups, J. Pure. Appl. Alg. 3 (1993).

[R-S] A. N. Rudakov, I. R. Shafarevich, Irreducible representations of a simple three dimensional Lie algebra over a field of finite characteristic, Math. Notes 2 (1967).

[Ku] N. Kurokawa, Special values of Selberg zeta functions, Contemp. Math. 83 (1989). この論文の圏のゼータ関数の定義が本稿の非可換環のゼータ関数の定義を示唆するものである。